

Zygmunt Jamrógiwicz (wybór)

1.1. Tablice niektórych parametrów fizykochemicznych

1.1.1. Jednostki podstawowe i pochodne układu SI [1]

Podstawowe		
JEDNOSTKA	Skrót	Definicja
Metr	<i>m</i>	Długość drogi przebytej przez światło w próżni w czasie $1/299\,792\,458$ s ($1/c$)
Kilogram	<i>kg</i>	Masa międzynarodowego wzorca
Sekunda	<i>s</i>	Czas trwania 9 192 631 770 okresów promieniowania, odpowiadających przejściu między nadsubtelnymi poziomami stanu podstawowego atomu nuklidu ^{133}Cs
Amper	<i>A</i>	Natężenie prądu niezmiennego się, który płynąc w dwóch równoległych przewodach prostoliniowych, nieskończenie długich, o przekroju kołowym, znikomo małym, umieszczonych w próżni w odległości 1 m od siebie wywoła między tymi przewodami siłę równą $2 \cdot 10^{-7}$ N na każdy metr przewodu
Kelwin	<i>K</i>	$1/273,16$ część temperatury termodynamicznej punktu potrójnego wody
Mol	<i>mol</i>	Liczność materii; mol jest ilością materii układu zawierającego liczbę cząsteczek lub cząstek (molekuł, jonów, asocjatów, elektronów itp.) równą liczbie atomów zawartych w masie 0,012 kg nuklidu węgla ^{12}C [$6,02 \cdot 10^{23}$]

Pochodne			
JEDNOSTKA	Skrót	Miano	Przeliczniki
Niuton	N	$\frac{kg \cdot m}{s^2}$	1 dyna = 10^{-5} N 1 kG = 9,81 N
Paskal	Pa	$\frac{N}{m^2}$	1 atm = 101 325 Pa = 760 Tr 1 bar = 10^5 Pa 1 MPa = 10 bar 1 mm Hg (1 Tr) = 133,32 Pa
Dżul	J	$\frac{kg \cdot m^2}{s^2}$	1 cal = 4,19 J 1 erg = 10^{-7} J
Kulomb	C	$\frac{A}{s}$	
Wat	W	$\frac{J}{s}$	
Wolt	V	$\frac{J}{A \cdot s}$	
Om	Ω	$\frac{V}{A}$	
Simens	S	Ω^{-1}	
Farad	F	$\frac{A \cdot s}{V}$	
Herc	Hz	s^{-1}	
Tesla	T	$\frac{Wb}{m^2}$	
Henr	H	$\frac{Wb}{A}$	
Weber	Wb	$V \cdot s$	

1.1.2. Przedrostki i mnożniki przeliczeniowe podjednostek

Przedrostek	Mnożnik	Przedrostek	Mnożnik
atto	10^{-18}		
femto	10^{-15}		
piko	10^{-12}	tera	10^{12}
nano	10^{-9}	giga	10^9
mikro	10^{-6}	mega	10^6
mili	10^{-3}	kilo	10^3
centy	10^{-2}	hekto	10^2
decy	10^{-1}	deka	10

1.1.3. Jednostki względnej zawartości

Miano	Mnożnik	Określenie	Przykłady	
procent	10^{-2}	Część na 100 części		
promil	10^{-3}	Część na 1000 części	ml/l; μ l/ml	mg/g; g/kg
ppm	10^{-6}	Część na milion części	μ l/l	μ g/g; mg/kg
ppb	10^{-9}	Część na miliard części	μ l/m ³	μ g/kg
ppt	10^{-12}	Część na trilion części		

1.1.4. Alfabet grecki

Litera grecka		Odpowiednik łaciński	Nazwa
α A		A	alfa
β B		B	beta
χ X		C	chi
δ Δ		D	delta
ϵ E		E	epsilon
ϕ Φ	φ	F	fi
γ Γ		G	gama
η H		H	eta
ι I		I	jota
φ ϑ	∂ ϑ	[J]	
κ K		K	kappa
λ Λ		L	lambda
μ M		M	mi
ν N		N	ni
\omicron O		O	omikron
π Π		P	pi
θ Θ	ϑ Θ	Q	theta
ρ P		R	ro
σ Σ	ς	S	sigma
τ T		T	tau
υ Y		U	ypsilon
ω Ω		V	
ω Ω		W	omega
ξ Ξ		X	ksi
ψ Ψ		Y	psi
ζ Z		Z	dzeta

Znaki z lewej kolumny można otrzymać stosując w edytorze Microsoft Word czcionkę „symbol” i klawisze oznaczone literami z kolumny trzeciej

1.1.5. Zasady zaokrąglania liczb

Treść reguły	Przykłady	
	Liczba przed zaokrągleniem	Liczba po zaokrągleniu
Aby zaokrąglić liczbę do <i>n</i> cyfr znaczących, należy wszystkie cyfry zapisane z prawej strony <i>n</i> -tej cyfry znaczącej (<u>podkreślone</u>) obciąć (w przypadku, gdy znajduje się ona na pozycji ułamkowej) bądź zastąpić je zerami (jeśli <i>n</i> -ta cyfra znajduje się na pozycji całkowitej).		
Jeśli pierwsza z odrzucanych cyfr jest:		
A. mniejsza od 5 , to pozostałych cyfr nie zmienia się	2,7 <u>46</u> 832 2 746 <u>832</u>	2,7 2 746 800
B. większa od 5 , to ostatnią cyfrę zwiększa się o 1 (jeśli ostatnią cyfrą jest 9, to o 1 zwiększa się przedostatnią, a ostatnią zamienia na 0)	2,74 <u>6</u> 832 2 746 <u>832</u> 4 859 <u>637</u>	2,75 2 747 000 4 860 000
C. równa 5 , to:		
1. jeśli wśród pozostałych odrzucanych cyfr nie wszystkie są zerami, to postępujemy jak w p. B	12,2 <u>500</u> 1 1 <u>250</u> 010 4 39 <u>5</u> 000,01	12,3 1 300 000 4 400 000
2. jeśli pozostałe z odrzucanych cyfr są zerami, to ^{*)} :		
▪ jeśli ostatnia pozostawiona cyfra jest parzysta , postępujemy jak w p. A	6 374 <u>500</u> 6 370 <u>500</u>	6 374 000 6 370 000
▪ jeśli ostatnia pozostawiona cyfra jest nieparzysta postępujemy jak w p. B	6 373 <u>500</u> 4 39 <u>5</u> 000	6 374 000 4 400 000

^{*)} Dzięki takiej konwencji suma, a także średnia, z liczb zaokrąglonych jest bliska sumie liczb przed zaokrągleniem. Ponieważ prawdopodobieństwo pojawienia się ostatniej cyfry parzystej jest identyczne z prawdopodobieństwem pojawienia się cyfry nieparzystej, ilość zaokrągleń „w górę” jest podobna co ilość zaokrągleń „w dół” i proces zaokrąglania tylko nieznacznie wpływa na wartość sumy.

1.1.6. Szereg napięciowy metali

Metal	Jon	Potencjał [V]	Metal	Jon	Potencjał [V]
Li	Li ⁺	-3,01	H₂	2H⁺	0,00
K	K ⁺	-2,92	Bi	Bi ³⁺	+0,20
Ba	Ba ²⁺	-2,92	Sb	Sb ³⁺	+0,20
Ca	Ca ²⁺	-2,84	Cu	Cu ²⁺	+0,34
Na	Na ⁺	-2,71	Ag	Ag ⁺	+0,80
Mg	Mg ²⁺	-2,38	Hg	Hg ²⁺	+0,87
Al	Al ³⁺	-1,66	Pt	Pt ²⁺	+1,20
Mn	Mn ²⁺	-1,05	Au	Au ³⁺	+1,42
Zn	Zn ²⁺	-0,76			
Cr	Cr ³⁺	-0,71			
Fe	Fe ²⁺	-0,44			
Cd	Cd ²⁺	-0,40			
Ni	Ni ²⁺	-0,22			
Sn	Sn ²⁺	-0,14			
Pb	Pb ²⁺	-0,13			
Fe	Fe ³⁺	-0,04			

1.1.7. Potencjał elektrody chlorosrebrowej w zależności od stężenia roztworu KCl i temperatury [1]

Temperatura [°C]	Potencjał [mV]	
	Roztwór KCl 3,5 M	Roztwór KCl nasycony
10	215,2	213,8
15	211,7	208,9
20	208,2	204,0
25	204,6	198,9
30	200,9	193,9
35	197,1	188,7
40	193,3	183,5

1.1.8. Przewodnictwo właściwe wodnych roztworów KCl o różnym stężeniu i w różnych temperaturach [1]

Temperatura [°C]	Wartość przewodnictwa właściwego $\chi \cdot 10^{-4}$ [S·cm ⁻¹]			
	0,01 M	0,02 M	0,1 M	1,0 M
10	10,20	19,94	93,3	831,9
20	12,78	25,01	116,3	1020,7
22	13,32	26,06	121,5	1059,4
25	14,13	27,65	128,8	1118,0
28	14,96	29,27	136,2	—
30	15,52	30,36	141,2	—
34	16,67	32,56	151,3	—
36	—	33,68	156,4	—

1.1.9. Stałe dysocjacji słabych elektrolitów [4]

Związek	K ₁	K ₂	K ₃
H ₃ BO ₃	$5,8 \cdot 10^{-10}$	$1,8 \cdot 10^{-13}$	$1,6 \cdot 10^{-14}$
H ₂ CO ₃	$4,5 \cdot 10^{-7}$	$4,7 \cdot 10^{-11}$	
H ₃ PO ₄	$7,5 \cdot 10^{-3}$	$6,3 \cdot 10^{-8}$	$1,3 \cdot 10^{-12}$
H ₂ S	$6,0 \cdot 10^{-8}$	$1,0 \cdot 10^{-14}$	
H ₂ SiO ₃	$2,2 \cdot 10^{-10}$	$1,6 \cdot 10^{-12}$	
H ₂ SO ₃	$1,6 \cdot 10^{-2}$	$6,3 \cdot 10^{-8}$	
NH ₄ OH	$1,8 \cdot 10^{-5}$		
kw. benzoowy	$6,6 \cdot 10^{-5}$		
kw. masłowy	$1,5 \cdot 10^{-5}$		
kw. mlekowy	$1,4 \cdot 10^{-4}$		
kw. octowy	$1,75 \cdot 10^{-5}$		
kw. cytrynowy	$7,4 \cdot 10^{-4}$	$1,7 \cdot 10^{-5}$	$4,0 \cdot 10^{-7}$
kw. winowy (+)	$1,0 \cdot 10^{-3}$	$4,6 \cdot 10^{-5}$	
fenol	$1,0 \cdot 10^{-10}$		

1.1.10. Iloczyn jonowy wody w różnych temperaturach

Temperatura [°C]	$K_w \cdot 10^{14}$	pH
0	0,1139	7,47
10	0,2920	7,27
20	0,6809	7,08
25	1,008	7,00 (6,9983)
30	1,469	6,92
40	2,919	6,77
50	5,474	6,63
60	9,614	6,51
100	59,0	6,12

1.1.11. Współczynnik załamania światła i jego przybliżona zależność od temperatury

	n_D^{20}	$-\frac{\Delta n}{\Delta t} \cdot 10^4$
aceton	1,3591	5
acetonitryl	1,3460	5
alkohol benzylowy	1,5404	4
alkohol butylowy	1,3993	4
alkohol <i>tert</i> -butylowy	1,3878	
alkohol etylowy	1,3613	4
alkohol izopropylowy	1,3773	
alkohol propylowy	1,3854	4
alkohol metylowy	1,3286	4
anilina	1,5863	5
benzen	1,5011	6,6
chloroform	1,4456	6
cykloheksan	1,4262	5,5
dioksan	1,4223	
gliceryna	1,4744	2
<i>n</i> -heksan	1,3751	5,5
toluen	1,4969	5,5
woda	1,3330	0,8
węgla disiarczek	1,6319	8
węgla tetrachlorek	1,4601	5,5

1.1.12. Współczynniki załamania światła o różnej długości fali, dla wody w różnych temperaturach

λ	10°C	20°C	30°C	40°C	50°C
656 nm	1,3318	1,3311	1,3302	1,3288	1,3274
589 nm (D)	1,3337	1,3330	1,3320	1,3306	1,3290
486 nm	1,3378	1,3371	1,3360	1,3347	1,3332
434 nm	1,3411	1,3404	1,3392	1,3379	1,3364

1.1.13. Skręcalność właściwa form D cukrów

sacharoza	66,5	Skręcalność równowagowa 52,7
α -glukoza	112	
β -glukoza	19	
fruktoza	-92,4	Skręcalność równowagowa 55,3
α -laktoza	90	
β -laktoza	35	
α -maltoza	168	Skręcalność równowagowa 136
β -maltoza	112	

1.1.14. Lepkość dynamiczna cieczy w różnych temperaturach
(w [cP] czyli [mN·s·m⁻²] czyli [s·Pa])

Lp.	Substancja	Temperatura [°C]				
		10	20	25	30	40
1	aceton	0,361	0,325	0,309	0,296	0,271
2	acetonitryl	0,396	0,357	0,340	0,325	
3	alkohol benzylowy		5,800	5,054	4,320	3,288
4	alkohol butylowy	3,87	2,95		2,28	1,78
5	alkohol etylowy	1,466	1,20	1,096	1,003	0,834
6	alkohol izopropylowy	3,26	2,39		1,77	1,33
7	alkohol metylowy	0,690	0,597	0,547	0,510	0,450
8	anilina	6,46	4,40	3,75	3,20	2,35
9	benzen	0,755	0,652	0,600	0,559	0,503
10	chloroform	0,630	0,570	0,543	0,514	0,466
11	cykloheksan		0,970		0,822	0,706
12	dioksan		1,255	1,196	1,063	0,917
13	gliceryna	3 950	1 500	950	630	330
14	glikol etylowy		19,9	16,5	13,2	9,13
15	n-heksan	0,343	0,307	0,294	0,290	0,253
16	toluen	0,667	0,584	0,550	0,517	0,469
17	woda	1,308	1,005	0,894	0,801	0,656
18	węgiel disiarczek	0,396	0,365	0,349	0,341	0,319
19	węgiel tetrachlorek	1,132	0,969	0,900	0,843	0,739

1.1.15. Napięcie powierzchniowe $\sigma \cdot 10^3$ [N/m]

Lp.	Substancja	Temperatura [°C]				
		10	20	25	30	40
1	aceton	25,00	23,70		22,01	21,16
2	acetonitryl		29,10		27,80	
3	alkohol benzylowy		42,76		38,94	
4	alkohol butylowy	25,4	24,6		23,8	23,0
5	alkohol etylowy	23,14	22,03		21,48	20,20
6	alkohol izopropylowy		21,2			
7	alkohol metylowy	23,5	22,6		21,8	20,9
8	anilina	44,38	43,30		42,24	41,20
9	benzen	30,24	28,88	28,18	27,49	26,14
10	chloroform	28,50	27,14		25,89	
11	cykloheksan	26,15	24,95	24,35	23,75	22,45
12	dioksan		35,42			
13	gliceryna		59,4		59,0	58,5
14	glikol etylowy		46,1			
15	<i>n</i> -heksan	19,51	18,46		17,40	16,31
16	toluen	29,70	28,53	27,92	27,32	26,15
17	woda	74,22	72,75	71,96	71,15	69,55
18	węgla disiarczek	33,90	32,25		30,85	
19	węgla tetrachlorek	28,05	25,68		25,54	24,41

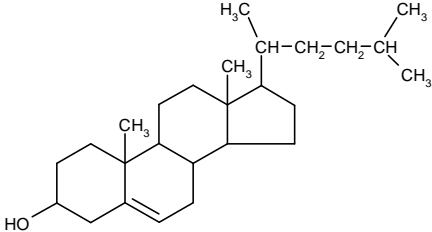
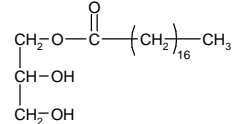
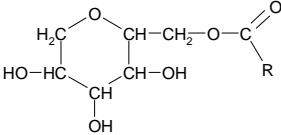
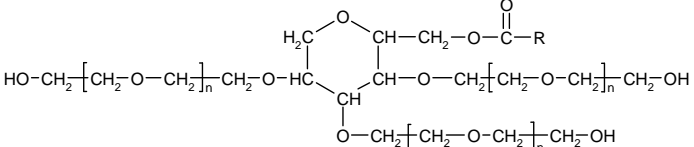
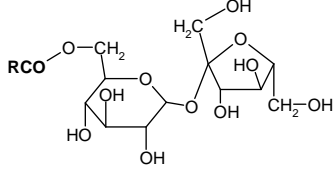
1.1.16. Stałe krioskopowe i ebulioskopowe

Rozpuszczalnik	Stała krioskopowa	Stała ebulioskopowa
woda	1,86	0,52
benzen	5,10	2,6
aceton		1,48
chloroform	4,9	3,8
kwas octowy	3,9	3,1
jodek metylu		4,2
cykloheksan	20,2	2,8
naftalen	7,0	5,8
kamfora	40,0	6,1

1.1.17. Właściwości popularnych rozpuszczalników

		M.cz.	ρ^{20} (*25°C)	t_w [°C]	Moment di- polowy [D]	Stała dielektryczna ϵ
1	aceton	58,05	0,7900	56,3	2,76	20,70
2	acetonitryl	41,05	0,7766*	81,6		37,50
3	alkohol benzytowy	108,14	1,0454	205,4	1,76	13,10
4	alkohol <i>n</i> -butylowy	74,12	0,8097	117,7	1,71	17,51
5	alkohol <i>tert</i> -butylowy	74,12	0,7887	82,2	1,66	1,77
6	alkohol etylowy	46,07	0,7850	78,3	1,66	24,55
7	alkohol propylowy	60,10	0,8038	97,2	1,69	20,33
8	alkohol izopropylowy	60,10	0,7854	97,2		20,33
9	alkohol metylowy	32,04	78,66*	64,7	1,62	32,7
10	alkohol cykloheksylowy	100,16	0,9684*	161,1	1,69	15,00
11	anilina	93,13	1,0217	184,4	1,51	6,89
12	benzen	78,12	0,8737*	80,1	0	2,28
13	chloroform	119,38	1,4799*	61,1	1,15	4,81
14	cykloheksan	84,16	0,7786	80,7	0	2,02
15	dioksan	88,11	1,026*	101,3	0	2,21
16	eter dietylowy	74,12	0,7138	34,5	1,29	4,34
17	gliceryna				2,67	
18	<i>n</i> -heksan	86,17	0,6548*	68,7	0	1,89
19	<i>n</i>-oktanol	130,23	0,8221*	195,2	1,64	10,34
20	oktan	114,22	0,7025	125,6	0	1,95
21	izooktan	114,22	0,6918	99,2		
22	toluen	92,14	0,8669	110,6	0,39	2,38
23	woda	18,02	0,9971*	100,0	1,76	78,54
24	węgla disiarczek	76,14	1,2700	46,2	0	2,64
25	węgla tetrachlorek	153,82	1,6037	76,7	0	2,24

1.1.18. Przykłady emulgatorów różnych typów

NIEJONOWE	
alkohole tłuszczowe	alkohol cetostearylowy (mieszanka alkoholu stearylowego i cetylowego)
alkohole steroidowe	cholesterol 
estry alkoholi wielowodorotlenowych z kwasami tłuszczowymi	monostearynian glicerolu 
estry sorbitanu i wyższych kwasów tłuszczowych	Span 
estry polioksyetylenosorbitanu i wyższych kwasów tłuszczowych	Tween (polisorbitat) 
estry wyższych kwasów tłuszczowych z glikolami polioksyetylenowymi (PEG)	Myrj $\text{CH}_3-(\text{-CH}_2\text{-})_{16}\text{-CO-O-CH}_2\text{-(}\text{-CH}_2\text{-O-CH}_2\text{-})_n\text{-CH}_2\text{OH}$
etry wyższych alkoholi tłuszczowych z glikolami polioksyetylenowymi	$\text{R-(O-CH}_2\text{-CH}_2\text{-)}_n\text{-OH}$
estry sacharozy i kwasów tłuszczowych	

JONOWE	
anionowo czynne	
mydła (sole kwasów tłuszczowych) $R - COO^- Me^+$ $[R - COO^-]_2 Me^{2+}$	$C_{15}H_{31}COONa$ $C_{17}H_{35}COONa$ $(C_{15}H_{31}COO)_2Ca$ palmitynian sodu stearynian sodu palmitynian wapnia
alkilosiarczany $R - O - SO_3^- Me^+$	laurylosiarczan sodu $CH_3(CH_2)_{10}O - SO_3 Na$
alkilosulfoniany $R - SO_3^- Me^+$	cetylosulfonian sodu $H_3C - (CH_2)_{14} - CH_2 - SO_3 Na$
kationowo czynne	
IV- rzędowe sole amoniowe $\left[\begin{array}{c} R & & R \\ & \diagdown & / \\ & N & \\ & / & \diagdown \\ R & & R \end{array} \right]^+ X^-$	$R = C_8H_{17} - C_{18}H_{37}$ chlorek benzalkoniowy $\left[\begin{array}{c} CH_3 \\ \\ H_3C - N - CH_2 - \text{benzene ring} \\ \\ R \end{array} \right]^+ Cl^-$
amfoteryczne	
wykazują charakter anionowy lub kationowy w zależności od pH	proteiny (żelatyna, kazeina) lecytyna (mieszanina fosfolipidów) $\begin{array}{c} O \\ \\ C_{17}H_{35} - C - O - CH_2 \\ \\ C_{17}H_{35} - C - O - CH \\ \\ O \end{array} \quad \begin{array}{c} O^- \\ \\ H_2C - O - P - O - CH_2 - CH_2 - N^+(CH_3)_2 \\ \\ O \end{array}$

Źródła:

1. Poradnik chemika analityka (red. J. Ciba), t.2 *Analiza instrumentalna*, Wydawnictwa Naukowo-Techniczne, Warszawa 1991.
2. J.F. Buhl i inni, Poradnik chemika analityka, t.1 *Dane fizykochemiczne. Analiza chemiczna*, Wydawnictwa Naukowo-Techniczne, Warszawa 1994.
3. Zbiór wielkości fizykochemicznych (red. K.P. Miszczenko; A.A. Rawidiel), PWN, Warszawa 1974.
4. Poradnik fizykochemiczny, Praca zbiorowa, WNT, Warszawa 1974.

1.2. Przegląd działań matematycznych

Fizyka nie może obejść się bez matematyki (szczególnie tej tzw. wyższej), stąd i chemia fizyczna, nawet w takim nieco „skróconym” wydaniu dla farmaceutów, nie może całkowicie z niej zrezygnować w trakcie omawiania niektórych tematów. Poniżej przedstawiamy dla przypomnienia parę informacji, ułatwiających zrozumienie wyprowadzeń wzorów i matematycznych dowodów, które spotka uczyć się chemii fizycznej.

1.2.1. Potęgi

Wzory podane poniżej odczytywać należy w obie strony, tzn. jeśli $a^p \cdot a^q = a^{p+q}$ to zarówno można liczyć $a^2 \cdot a^3 = a^5$ jak również, jeśli jest taka potrzeba, można rozbić $a^5 = a^2 \cdot a^3$

$a^0 = 1$ Każda liczba podniesiona do potęgi 0 równa się jeden

$a^{-1} = \frac{1}{a}$ Wartość liczby podniesionej do potęgi -1 wynosi odwrotność tej liczby

$$a^p \cdot a^q = a^{p+q}$$

$$\frac{a^p}{a^q} = a^{p-q}$$

$$(a^p)^q = a^{p \cdot q}$$

$$a^{\frac{1}{p}} = \sqrt[p]{a}$$

$$a^{\frac{q}{p}} = \sqrt[p]{a^q}$$

Przykład

$$\left(\frac{a}{a^2}\right)^3 = a^{\frac{5}{2}} = a^{(-5-2) \cdot 3} = a^{\frac{-5-4}{2} \cdot 3} = a^{\frac{-9}{2} \cdot 3} = a^{\frac{-27}{2}} = \left(\frac{1}{a^{27}}\right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{1}{a^{27}}} = \frac{1}{\sqrt{a^{27}}}$$

1.2.2. Logarytmy

Logarytm, jest to wartość wykładnika potęgi, do której podniesiona podstawa logarytmu da wartość liczby logarytmowanej. Podstawą logarytmu mogą być liczby dodatnie, różne od 1. W praktyce zagadnień fizykochemicznych mamy do czynienia z logarytmami naturalnymi i dziesiętnymi.

$$\log_{10} 30 = a, \text{ to znaczy, że } 10^a = 30 \text{ lub } \log_{10} a = 2, \text{ to znaczy, że } a = 10^2.$$

Logarytmy istnieją tylko dla liczb >0 . Dla liczb mniejszych od jedności przyjmują wartości ujemne

W matematycznym opisie zjawisk przyrodniczych najczęściej występuje logarytm naturalny, czyli logarytm o podstawie e (liczba Eulera: 2,72...) oznaczany skrótem \ln . Z różnych powodów (najczęściej „technicznych”) był on w wielu przypadkach przeliczany na logarytm dziesiętny:

$$\ln a = 2,303 \lg a$$

Dzisiaj nie ma już takiej potrzeby i należy stosować logarytmy naturalne, za wyjątkiem sytuacji, gdzie podstawa logarytmu z jakichś względów musi być inna (np. klasyczna definicja pH).

$$\lg 1 = 0$$

Każda liczba podniesiona do potęgi 0 równa się jeden

$$\lg \frac{1}{a} = -\lg a$$

$$\lg \frac{1}{a} = \lg 1 - \lg a = 0 - \lg a = -\lg a$$

$$\lg a^p = p \lg a$$

$$\lg a \cdot b = \lg a + \lg b$$

$$\lg \frac{a}{b} = \lg a - \lg b$$

$$\lg \sqrt[p]{a} = \frac{1}{p} \lg a$$

$$\lg \sqrt[p]{a^q} = \frac{p}{q} \lg a$$

Przykład

$$\lg \frac{a^3}{\sqrt[3]{b^2}} \cdot c^{-2} = \lg a^3 - \lg \sqrt[3]{b^2} + \lg c^{-2} = 3 \lg a - \frac{2}{3} \lg b - 2 \lg c$$

1.2.3. Pochodne i różniczki

Jeżeli przebieg jakiegoś procesu nie jest liniowy, tzn. główne parametry tego procesu zmieniają się np. wraz z upływem czasu, to w celu opisanego tego zjawiska równaniem matematycznym musimy najczęściej sięgnąć do pochodnych, różniczek (a później zazwyczaj i całek). Przykładem takiego zjawiska może być reakcja chemiczna, gdzie główny parametr – szybkość reakcji – zmienia się wraz z czasem (a dokładniej, stężeniem substratów, zależnym od czasu). Zatem dla zrozumienia opisu takich zjawisk koniecznym staje się posiadanie pewnego minimum wiadomości na temat analizy matematycznej.

Jeżeli jakieś zjawisko opisane jest funkcją $F(x)$, to wartość tangensa kąta nachylenia stycznej do wykresu tej funkcji w punkcie x wyznacza nowa funkcja: $f(x)$, zwana funkcją po-

chodną funkcji pierwotnej $F(x)$: $F'(x) = f(x)$. Znając funkcję pierwotną $F(x)$ potrafimy znaleźć funkcję pochodną $f(x) = F'(x)$ (różniczkowanie funkcji).

Wartości pochodnych najczęściej spotykanych funkcji:

Funkcja $F(x)$	Funkcja pochodna $F'(x)$	
C (wartość stała)	0	
x	1	
x^n	$n \cdot x^{n-1}$	$(x^2)' = 2x$; $(x^3)' = 3x^2$
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$	Wszystkie te wzory wynikają ze wzoru powyżej; różne przedziały wartości n
$\frac{1}{x^n}$	$-n \cdot \frac{1}{x^{n+1}}$	
\sqrt{x}	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	
$\sqrt[n]{x}$	$\frac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}$	
a^x	$a^x \ln a$	Przypadek szczególny dla $a = e$; $\ln e = 1$ i $(e^x)' = e^x$
e^x	e^x	
$\log_a x$	$\frac{1}{x \ln a}$	
$\ln x$	$\frac{1}{x}$	Przypadek szczególny dla $a = e$; $\ln e = 1$
Zasady obliczania pochodnych		
$a \cdot g(x)$	$a \cdot g'(x)$	$(5x^2)' = 5 \cdot (x^2)' = 5 \cdot 2x = 10x$
$g(x) + G(x)$	$g'(x) + G'(x)$	$(5x^2 + 2x + 2)' = 10x + 2 + 0$
$g(x) \cdot G(x)$	$g'(x) \cdot G(x) + g(x) \cdot G'(x)$	$(x^2 \cdot \ln x)' = 2x \cdot \ln x + x^2 \cdot \frac{1}{x} = x(\ln ex^2)$
$\frac{g(x)}{G(x)}$	$\frac{g'(x) \cdot G(x) - g(x) \cdot G'(x)}{G^2(x)}$	
$g(G)$; zaś $G = f(x)$	$g'(G) \cdot f'(x)$	

Pochodną funkcji $F(x)$ oznaczamy symbolem $F'(x)$ lub $\frac{dy}{dx}$ (dy po dx).

Dla funkcji kilku zmiennych $F(p; q; r; \dots; x)$ stosujemy czasem zabieg obliczania pochodnej cząstkowej, traktując wszystkie zmienne tej funkcji, prócz jednej, jako stałe. Funkcja n

zmiennych niezależnych ma n pochodnych cząstkowych. Pochodne cząstkowe najczęściej oznaczane są symbolem F'_x lub $\frac{\partial y}{\partial x}$ (dla pochodnej cząstkowej względem zmiennej niezależnej x).

Symbolika stosowana przy pochodnych ma zastosowanie również w rachunku różniczkowym, co prowadzi czasem do nieporozumień. Ponadto sam termin „różniczka” oznacza dwa różne pojęcia:

dx – różniczka zmiennej niezależnej, jest to dowolny przyrost (najczęściej bardzo mały) zmiennej niezależnej, Δx ;

dy – różniczka funkcji $y = f(x)$, jest to iloczyn wartości pochodnej tej funkcji w punkcie x i różniczki dx : $dy = f'(x)dx$.

W sytuacji funkcji F kilku zmiennych, oblicza się niekiedy różniczkę cząstkową względem jednej ze zmiennych, podobnie jak pochodną cząstkową (tu względem zmiennej x):

$$dF_x = \frac{\partial F}{\partial x} dx$$

Sumę wszystkich różniczek cząstkowych danej funkcji wielu zmiennych, nazywamy różniczką zupełną:

$$dF = \frac{\partial F}{\partial p} dp + \frac{\partial F}{\partial q} dq + \dots + \frac{\partial F}{\partial x} dx$$

W przypadku pochodnych i różniczek wyższych rzędów (pochodna pochodnej i różniczka różniczki) stosuje się symbolikę: $(y')' = y''$; $\frac{d^2 y}{dx^2}$; $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$; $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} dx^2$.

1.2.4. Całkowanie

Znając funkcję $f(x)$ możemy wyznaczyć jej funkcję pierwotną $F(x)$ (choć nie zawsze jest to zadanie łatwe). Taka czynność nazywa się całkowaniem funkcji: $\int f(x) = F(x)$. Całka nieoznaczona oznacza poszukiwanie funkcji pierwotnej, lub raczej całej rodziny funkcji, różniących się tylko wartością stałej C (tzw. stała całkowania):

$$\int f(x) = F(x) + C$$

Całka oznaczona pozwala znaleźć konkretną wartość, jeśli granice całkowania są liczbami, lub konkretną funkcję, jeśli granice są symboliczne:

$$\int_4^7 f(x) = F(7) - F(4)$$

$$\int_{x_1}^{x_2} f(x) = F(x_2) - F(x_1) = \Phi(x)$$

$$\int_a^b F'(x) dx = F(x) \Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

Wartości całek najczęściej spotykanych funkcji:

Funkcja $F(x)$	$\int F(x)$	
adx	ax	
$x dx$	$\frac{x^2}{2}$	
$x^n dx$	$\frac{x^{n+1}}{n+1}$	za wyjątkiem $n = -1!$ Patrz wzór poniżej
$\frac{dx}{x}$	$\ln x$	
$a^x dx$	$\frac{a^x}{\ln a}$	$a > 0; a \neq 1$
$e^x dx$	e^x	Przypadek szczególny dla $a = e$; $\ln e = 1$ i $\int e^x = e^x \ln e = e^x$
$e^{ax} dx$	$\frac{1}{a} e^{ax}$	
$x e^{ax} dx$	$\frac{e^{ax}}{a^2} (ax - 1)$	
$\ln x dx$	$x \ln x - x$	
Reguły całkowania		
$\int a \cdot f(x) dx$	$a \cdot \int f(x) dx$	Wyłączanie stałej przed symbol całki
$\int \{t(x) + u(x) - w(x)\} dx$	$\int t(x) dx + \int u(x) dx - \int w(x) dx$	
$\int f(x) dx$ gdy $x = \phi(t)$	$\int f[\phi(t)] \cdot \phi'(t) dt$	Reguła podstawiania